DOI:10. 13471/j. cnki. acta. snus. ZR20230036

环形区域上一类非线性四阶椭圆型方程的径向对称解*

王艳琰，李永祥

西北师范大学数学与统计学院,甘肃 兰州 730070

摘　要： 讨论了环形区域上一类非线性四阶椭圆型边值问题径向对称解的存在性，在非线性项满足适当的不等式的条件下，运用Leray-Schauder不动点定理和先验估计技巧，获得了径向解的存在性与唯一性结果.

关键词： 四阶椭圆边值问题；径向对称解；存在性与唯一性；Leray-Schauder不动点定理

中图分类号： O175.8；O177.91　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 2097 - 0137（2024）05 - 0177 - 08

Radial symmetric solution of a nonlinear fourth order elliptic equation on annular domains

WANG Yanyan, *LI Yongxiang*

College of Mathematics and Statistics, *Northwest Normal University*, *Lanzhou 730070*, *China*

Abstract: The existence of radial symmetric solutions of a nonlinear fourth order elliptic boundary value problem is discussed. Under the nonlinearity satisfies some inequality conditions, the existence and uniqueness results of radial symmetric solutions are obtained by applying the Leray-Schauder fixed point theorem and the technique of prior estimates.

Key words: fourth order elliptic boundary value problem; radial symmetric solution; existence and uniqueness; Leray-Schauder fixed point theorem

本文讨论非线性四阶椭圆型方程边值问题(BVP)

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f\left(|x|, u, |\nabla u|, \Delta u\right), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

径向对称解的存在性，其中 $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$，$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N \middle| r_1 < |x| < r_2\right\}$为$\mathbb{R}^N$中的环形区域，$N \geqslant 2, 0 < r_1 < r_2 < +\infty$，$f: [r_1, r_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$为连续函数.

四阶椭圆型方程边值问题(1)出现于悬桥振动和弹性板的静态形变等数学物理问题的研究中，有着重要的应用背景，该问题的一些特殊情形已被许多学者所研究. 其中对于非线性项不含梯度项 ∇u 和调和算子项 Δu 的简单情形

* **收稿日期：** 2023 - 12 - 08　　**录用日期：** 2024 - 05 - 15　　**网络首发日期：** 2024 - 07 - 25
基金项目： 国家自然科学基金(12061062)
作者简介： 王艳琰(2000年生)，女；**研究方向：** 非线性泛函分析；E-mail：1933161772@qq.com
通信作者： 李永祥(1963年生)，男；**研究方向：** 非线性泛函分析；E-mail：liyx@nwnu.edu.cn

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & \Delta u|_{\partial\Omega} = 0 . \end{cases} \tag{2}$$

彭永东等（1997）、Gazzola et al.（2003）、Liu et al.（2007）、Pei（2010）应用山路引理及临界点理论获得解的存在性与多重性结果，最近Feng et al.（2023）、Feng（2023）应用锥上的不动点定理获得了其正解的存在性与唯一性结果.问题（2）中增加了Δu线性项的情形也被一些作者所研究，邱海龙等（2012）应用Schaefer不动点定理获得了解的存在唯一性结果，Liu et al.（2010）、Zhang et al.（2011）、Pei et al.（2023）应用变分方法，获得了解的存在性结果.

对于非线性项含Δu但不含梯度项∇u的情形，即

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f(x, u, \Delta u), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & \Delta u|_{\partial\Omega} = 0 , \end{cases}$$

其解的存在性也被一些作者所研究（Pao，2000；Wang，2005；Pao et al.，2010）.其中Pao（2000）用上下解方法讨论了解的存在性，Pao et al.（2010）和Wang（2005）建立了解的单调迭代程序.

本文研究非线性项既含梯度项∇u也含Δu的一般四阶椭圆边值问题（1），我们尚未见到研究这种一般情形的文献.我们应用Leray-Schauder不动点定理与先验估计技巧，在非线性项满足一些易验证的不等式的条件下，获得了问题（1）径向对称解的存在性与唯一性结果.为了叙述方便，引入下列常数

$$L := r_2 - r_1, \quad M := \frac{{r_2}^{N-1}}{{r_1}^{N-1}}, \quad \sigma_1 := \frac{L^6 M^3}{8}, \quad \sigma_2 := \frac{L^4 M^3}{4}, \quad \sigma_3 := \frac{L^2 M}{2}. \tag{3}$$

本文的主要结果如下：

定理1 设$f: [r_1, r_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$连续，满足下列条件：

（H1）存在常数a，b，$c \geqslant 0$满足$\sigma_1 a + \sigma_2 b + \sigma_3 c < 1$及$d > 0$，使得

$$-f(r, \xi, \eta, \gamma)\gamma \leqslant a\xi^2 + b\eta^2 + c\gamma^2 + d, \quad r \in [r_1, r_2], (\xi, \eta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

则问题（1）至少有一个径向对称解.

定理2 设$f: [r_1, r_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$连续，满足下列条件：

（H2）存在常数a，b，$c \geqslant 0$满足$\sigma_1 a + \sigma_2 b + \sigma_3 c < 1$，使得

$$-(f(r, \xi_2, \eta_2, \gamma_2) - f(r, \xi_1, \eta_1, \gamma_1))(\gamma_2 - \gamma_1) \leqslant a(\xi_2 - \xi_1)^2 + b(\eta_2 - \eta_1)^2 + c(\gamma_2 - \gamma_1)^2,$$
$$r \in [r_1, r_2], (\xi_1, \eta_1, \gamma_1), (\xi_2, \eta_2, \gamma_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

则问题（1）存在唯一的径向对称解.

上述定理中的不等式条件（H1）与（H2）是容易验证的，它们允许非线性项$f(r, \xi, \eta, \gamma)$关于η, γ超线性增长.应用的例子见例1及例2.

特别地，对问题（2）应用定理2，可得如下存在唯一性结果：

推论3 设$f: [r_1, r_2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$连续.若存在常数$a \in \left[0, \dfrac{8}{L^6 M^3}\right)$，使得$f(r, \xi)$满足

$$-\big(f(r, \xi_2) - f(r, \xi_1)\big)(\xi_2 - \xi_1) \leqslant a(\xi_2 - \xi_1)^2, \qquad r \in [r_1, r_2], \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

则问题（2）存在唯一的径向对称解.

注1 Feng et al.（2023）、Feng（2023）的唯一性结果中要求$f(r, \xi)$关于ξ单调不减，而推论3中的条件（4）减弱了这一要求，这是一个新的唯一性结果.

1 预备知识

在问题（1）中，令$v = -\Delta u$，则其化为椭圆型方程组

$$\begin{cases}-\Delta u = v, \quad x \in \Omega,\\ -\Delta v = f\big(|x|, u, |\nabla u|, -v\big), \quad x \in \Omega,\\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad v\big|_{\partial\Omega} = 0.\end{cases} \tag{5}$$

若$u = u(|x|)$为问题(1)的径向对称解，令$r = |x| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_N}^2}$，则

$$|\nabla u| = \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)\right| = |u'(r)|,$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r) = \frac{1}{r^{N-1}}\big(r^{N-1}u'(r)\big)',$$

$$\Delta v = v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r) = \frac{1}{r^{N-1}}\big(r^{N-1}v'(r)\big)'.$$

因此，按方程组(5)，$\big(u(r), v(r)\big)$满足

$$\begin{cases}-\big(r^{N-1}u'(r)\big)' = r^{N-1}v(r), \quad r \in [r_1, r_2],\\ -\big(r^{N-1}v'(r)\big)' = r^{N-1}f\big(r, u(r), |u'(r)|, -v(r)\big), \quad r \in [r_1, r_2],\\ u(r_1) = u(r_2) = 0, \quad v(r_1) = v(r_2) = 0.\end{cases} \tag{6}$$

反之，若$\big(u(r), v(r)\big)$为常微分方程组边值问题(6)的解，则$\big(u(|x|), v(|x|)\big)$为方程组(5)的径向对称解，从而$u\big(|x|\big)$为问题(1)的径向对称解.因此，讨论问题(6)来获得问题(1)的径向对称解.为了讨论问题(6)，先做一些准备工作.

记$I = [r_1, r_2]$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $C(I)$表示在I上全体连续函数按范数$\|u\|_C = \max_{r \in I}|u(r)|$构成的Banach空间.对$n \in \mathbb{N}$，$C^n(I)$表示$I$上全体$n$阶连续可微函数按范数$\|u\|_{C^n} = \max\left\{\|u\|_C, \|u'\|_C, \cdots, \|u^{(n)}\|_C\right\}$构成的Banach空间.在$C(I)$中，我们还使用$L^2$-范数$\|u\|_2 = \left(\int_{r_1}^{r_2}|u(r)|^2\mathrm{d}r\right)^{1/2}$.设$X, Y$为Banach空间，我们用$X \times Y$表示$X$与$Y$的乘积空间按范数$\big\|(x, y)\big\| = \max\left\{\|x\|_X, \|y\|_Y\right\}$构成的Banach空间.

为了讨论问题(6)，先考虑二阶线性边值问题(LBVP)

$$\begin{cases}-\big(r^{N-1}u'(r)\big)' = r^{N-1}h(r), \quad r \in I,\\ u(r_1) = u(r_2) = 0,\end{cases} \tag{7}$$

其中$h \in C(I)$.

引理1　对任意$h \in C(I)$，问题(7)存在唯一解$u := Sh \in C^2(I)$，且解算子S：$C(I) \to C^1(I)$为线性全连续算子.

该引理见 Lemma 2(Li,2005) 或 Lemma 2.1(Li,2018).

引理2　对任意$h \in C(I)$，问题(7)的解$u = Sh$满足：

$$\|u\|_2 \leqslant \frac{L}{\sqrt{2}}\|u'\|_2, \qquad \|u'\|_2 \leqslant \frac{LM}{\sqrt{2}}\|h\|_2. \tag{8}$$

证明　对任意$h \in C(I)$，设$u = Sh \in C^2(I)$为问题(7)的解.则由问题(7)中的边界条件及Hölder不等式，有

$$\|u\|_2^{\,2} = \int_{r_1}^{r_2}|u(r)|^2\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2}\left|\int_{r_1}^{r}u'(s)\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}r \leqslant \int_{r_1}^{r_2}(r - r_1)\int_{r_1}^{r}|u'(s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}r \leqslant \frac{(r_2 - r_1)^2}{2}\|u'\|_2^{\,2}.$$

因此，式(8)中第1个式成立.

方程(7)两边同乘以$u(r)$，然后在I上积分并对右端应用Hölder不等式，有

$$-\int_{r_1}^{r_2}\left(r^{N-1}u'(r)\right)'u(r)\mathrm{d}r=\int_{r_1}^{r_2}r^{N-1}h(r)u(r)\mathrm{d}r\leqslant {r_2}^{N-1}\int_{r_1}^{r_2}\left|h(r)u(r)\right|\mathrm{d}r\leqslant {r_2}^{N-1}\|h\|_2\|u\|_2$$
$$\leqslant\frac{{r_2}^{N-1}(r_2-r_1)}{\sqrt{2}}\|h\|_2\|u'\|_2. \tag{9}$$

对上式左端应用分部积分公式，有

$$-\int_{r_1}^{r_2}\left(r^{N-1}u'(r)\right)'u(r)\mathrm{d}r=\int_{r_1}^{r_2}r^{N-1}\left|u(r)\right|^2\mathrm{d}r\geqslant {r_1}^{N-1}\|u'\|_2^{\,2}.$$

因此，由式(9)得

$${r_1}^{N-1}\|u'\|_2^{\,2}\leqslant\frac{{r_2}^{N-1}(r_2-r_1)}{\sqrt{2}}\|h\|_2\|u'\|_2 .$$

因此，

$$\|u'\|_2\leqslant\frac{{r_2}^{N-1}(r_2-r_1)}{\sqrt{2}\,{r_1}^{N-1}}\|h\|_2 .$$

即式(8)中第2个式成立.

考虑问题(6). 设f：$I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$连续，定义映射$F$：$C^1(I)\times C(I)\to C(I)$:

$$F(u,v)(r)=f\left(r,\ u(r),\ \left|u'(r)\right|,\ -v(r)\right),\ (u,v)\in C^1(I)\times C(I),\ \ r\in I.$$

按f：$I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的连续性，$F$：$C^1(I)\times C(I)\to C(I)$连续，且把$C^1(I)\times C(I)$中的有界集映为$C(I)$中的有界集. 若$(u,v)$为问题(6)的解，则按解算子$S$的定义和方程(6)，$(u,v)$满足

$$u=Sv,\qquad v=S\left(F(u,v)\right). \tag{10}$$

反之，若(u,v)是方程(10)的解，则由S的定义,(u,v)满足问题(6). 定义$C^1(I)\times C(I)$中的算子A：

$$A(u,v)=\left(Sv,S\left(F(u,v)\right)\right),\qquad (u,v)\in C^1(I)\times C(I). \tag{11}$$

则按S：$C(I)\times C^1(I)$的全连续性，A：$C^1(I)\times C(I)\to C^1(I)\times C(I)$全连续. 由式(10)，$(u,v)$为(6)的解的充要条件是$(u,v)$为$A$的不动点. 下节我们将对$A$应用如下全连续算子的Leray-Schauder不动点定理(郭大钧,1985)，证明问题(6)有解.

引理3 设E为Banach空间，A：$E\to E$为全连续映射. 若方程簇

$$u=\lambda Au,\qquad 0<\lambda\leqslant 1,$$

的解集在E中有界，则A至少有一个不动点.

2 主要结果的证明

定理1的证明 设A：$C^1(I)\times C(I)\to C^1(I)\times C(I)$为式(11)定义的全连续算子，我们对$A$应用Leray-Schauder不动点定理证明其有不动点. 为此考察$C^1(I)\times C(I)$中的方程簇

$$(u,v)=\lambda A(u,v),\qquad 0<\lambda\leqslant 1. \tag{12}$$

需要证明方程簇(12)的解集在$C^1(I)\times C(I)$中有界.

设$(u,v)\in C^1(I)\times C(I)$为方程簇(12)中某个参数$\lambda\in(0,1]$对应的方程的解，则按$A$的定义及$S$的线性

$$\begin{cases}u=\lambda Sv=S(\lambda v),\\ v=\lambda S\left(F(u,v)\right)=S(\lambda F(u,v)).\end{cases}$$

按S的定义，u与v分别为$h=\lambda v$与$h=\lambda F(u,v)$对应的问题(7)的解，因此u，$v\in C^2(I)$满足方程

$$\begin{cases}-\left(r^{N-1}u'(r)\right)'=\lambda r^{N-1}v(r),\qquad r\in I,\\ -\left(r^{N-1}v'(r)\right)'=\lambda r^{N-1}f\left(r,\ \ u(r),\ \ \left|u'(r)\right|,\ \ -v(r)\right),\qquad r\in I,\\ u(r_1)=u(r_2)=0,\qquad v(r_1)=v(r_2)=0.\end{cases}$$

上式中第2个方程两边同乘以$v(r)$，并在I上积分，右端应用条件(H1)，有

$$
\begin{aligned}
-\int_{r_1}^{r_2}\left(r^{N-1}v'(r)\right)'v(r)\mathrm{d}r &= \int_{r_1}^{r_2}\lambda r^{N-1}f\left(r,\ u(r),\ |u'(r)|,\ -v(r)\right)v(r)\mathrm{d}r \\
&= \int_{r_1}^{r_2}\lambda r^{N-1}\left(\ -f\left(r,\ u(r),\ |u'(r)|,\ -v(r)\right)\right)\left(\ -v(r)\right)\mathrm{d}r \\
&\leqslant \lambda\int_{r_1}^{r_2}r^{N-1}\left(a|u(r)|^2+b|u'(r)|^2+c|v(r)|^2+d\right)\mathrm{d}r \\
&\leqslant {r_2}^{N-1}\left(a\|u\|_2^{\ 2}+b\|u'\|_2^{\ 2}+c\|v\|_2^{\ 2}+d(r_2-r_1)\right).
\end{aligned} \tag{13}
$$

对上式左端应用分部积分公式，得

$$-\int_{r_1}^{r_2}\left(r^{N-1}v'(r)\right)'v(r)\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2}r^{N-1}\left(v'(r)\right)^2\mathrm{d}r \geqslant {r_1}^{N-1}\|v'\|_2^{\ 2}.$$

因此，由式(13)得

$$\|v'\|_2^{\ 2} \leqslant M\left(a\|u\|_2^{\ 2}+b\|u'\|_2^{\ 2}+c\|v\|_2^{\ 2}+dL\right). \tag{14}$$

因为$u=S(\lambda v)$，由引理2之式(8)，有

$$\|u\|_2 \leqslant \frac{L}{\sqrt{2}}\|u'\|_2, \qquad \|u'\|_2 \leqslant \frac{LM}{\sqrt{2}}\|\lambda v\|_2 \leqslant \frac{LM}{\sqrt{2}}\|v\|_2. \tag{15}$$

又因为$v=S(\lambda F(u,v))$,再由引理2之式(8)，有

$$\|v\|_2 \leqslant \frac{L}{\sqrt{2}}\|v'\|_2. \tag{16}$$

由式(15)~(16)，得

$$\|u\|_2 \leqslant \frac{L^3M}{2\sqrt{2}}\|v'\|_2, \qquad \|u'\|_2 \leqslant \frac{L^2M}{\sqrt{2}}\|v'\|_2. \tag{17}$$

由式(14)和式(16)~(17)，有

$$
\begin{aligned}
\|v'\|_2^{\ 2} &\leqslant M\left(a\|u\|_2^{\ 2}+b\|u'\|_2^{\ 2}+c\|v\|_2^{\ 2}+dL\right) \\
&\leqslant a\frac{L^6M^3}{8}\|v'\|_2^{\ 2}+b\frac{L^4M^3}{4}\|v'\|_2^{\ 2}+c\frac{L^2M}{2}\|v'\|_2^{\ 2}+dLM \\
&= \left(a\frac{L^6M^3}{8}+b\frac{L^4M^3}{4}+c\frac{L^2M}{2}\right)\|v'\|_2^{\ 2}+dLM \\
&= \left(\sigma_1a+\sigma_2b+\sigma_3c\right)\|v'\|_2^{\ 2}+dLM.
\end{aligned}
$$

因此，有

$$\|v'\|_2 \leqslant \left(\frac{dLM}{1-(\sigma_1a+\sigma_2b+\sigma_3c)}\right)^{1/2} := C_0. \tag{18}$$

对任意$r\in I$，由式(18)及Hölder不等式，有

$$|v(r)| = |v(r)-v(r_1)| = \left|\int_{r_1}^{r}v'(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_{r_1}^{r_2}|v'(s)|\mathrm{d}s \leqslant \sqrt{r_2-r_1}\|v'\|_2 \leqslant \sqrt{L}\,C_0.$$

因此，有

$$\|v\|_C \leqslant \sqrt{L}\,C_0 := C_1. \tag{19}$$

因为$u=S(\lambda v)$，按S：$C(I)\times C^1(I)$的有界性，有

$$\|u\|_{C^1} = \|S(\lambda v)\|_{C^1} \leqslant \|S\|\cdot\|\lambda v\|_C \leqslant \|S\|\cdot\|v\|_C \leqslant C_1\|S\| := C_2. \tag{20}$$

其中$\|S\|$为S作为$C(I)$到$C^1(I)$的线性有界算子的范数. 按式(19)~(20)，(u,v)在$C^1(I)\times C(I)$中的范数

$$\|(u,v)\| = \max\left\{\|u\|_{C^1},\ \|v\|_C\right\} \leqslant \max\left\{C_1,C_2\right\} := C_3.$$

因此，方程簇(12)的解集在$C^1(I)\times C(I)$中有界. 由Leray-Schauder不动点定理知，A在$C^1(I)\times C(I)$中有

不动点(u_0,v_0)，该不动点为问题(6)的解．因此$u_0(|x|)$为问题(1)的径向对称解．

定理2的证明 为了证明存在性，我们先证条件(H2)⇒条件(H1)．令$M_0=1+\max\limits_{r\in I}\left|f(r,0,0,0)\right|$，取$\varepsilon$充分小，使得条件(H2)中的常数$a$，$b$，$c$满足

$$\sigma_1 a+\sigma_2 b+\sigma_3(c+\varepsilon)<1. \tag{21}$$

对$(r,\xi,\eta,\gamma)\in I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$，在条件(H2)中取$(\xi_1,\eta_1,\gamma_1)=(0,0,0)$，$(\xi_2,\eta_2,\gamma_2)=(\xi,\eta,\gamma)$，则有

$$\begin{aligned}-f(r,\xi,\eta,\gamma)\gamma&=-\big(f(r,\xi,\eta,\gamma)-f(r,0,0,0)\big)(\gamma-0)-f(r,0,0,0)\gamma\leqslant a\xi^2+b\eta^2+c\gamma^2+M_0|\gamma|\\&\leqslant a\xi^2+b\eta^2+c\gamma^2+2\cdot\frac{M_0}{2\sqrt{\varepsilon}}\cdot\sqrt{\varepsilon}|\gamma|\leqslant a\xi^2+b\eta^2+(c+\varepsilon)\gamma^2+\frac{M_0^{\,2}}{4\varepsilon}.\end{aligned}$$

上式最后一步对$2\cdot\dfrac{M_0}{2\sqrt{\varepsilon}}\cdot\sqrt{\varepsilon}|\gamma|$应用了平方不等式：$2pq\leqslant p^2+q^2$，$p$，$q\in\mathbb{R}$．因此，由式(21)，$f$满足条件(H1)，故按定理1，问题(1)有径向对称解．

再证唯一性．设u_1,u_2为问题(1)的径向对称解．令$v_1=-\Delta u_1,v_2=-\Delta u_2$，则$\big(u_1(r),v_1(r)\big)$，$\big(u_2(r),v_2(r)\big)$满足问题(6)．由问题(6)及$S$的定义，有

$$u_i=S(v_i),\qquad v_i=S\big(F(u_i,v_i)\big),\quad i=1,2. \tag{22}$$

令$u(r)=u_2(r)-u_1(r)$，$v(r)=v_2(r)-v_1(r)$，则由式(22)，有

$$v=v_2-v_1=S\big(F(u_2,v_2)-F(u_1,v_1)\big).$$

按S的定义，v为$h:=F(u_2,v_2)-F(u_1,v_1)\in C(I)$对应问题(7)的解，因此$v\in C^2(I)$满足方程

$$\begin{cases}-\big(r^{N-1}v'(r)\big)'=r^{N-1}\big(F(u_2,v_2)(r)-F(u_1,v_1)(r)\big),\ r\in I,\\ v(r_1)=v(r_2)=0.\end{cases}$$

上式两端同乘以$v(r)$，由条件(H2)，有

$$\begin{aligned}-\big(r^{N-1}v'(r)\big)'v(r)&=r^{N-1}\big(F(u_2,v_2)(r)-F(u_1,v_1)(r)\big)\big(v_2(r)-v_1(r)\big)\\&=r^{N-1}\Big(f\big(r,u_2(r),|u_2'(r)|,-v_2(r)\big)-f\big(r,u_1(r),|u_1'(r)|,-v_1(r)\big)\Big)\big(v_2(r)-v_1(r)\big)\\&\leqslant r^{N-1}\Big(a\big(u_2(r)-u_1(r)\big)^2+b\big(|u_2'(r)|-|u_1'(r)|\big)^2+c\big(v_2(r)-v_1(r)\big)^2\Big)\\&\leqslant r^{N-1}\Big(a|u(r)|^2+b|u'(r)|^2+c|v(r)|^2\Big),\quad r\in I.\end{aligned}$$

将上式两端在I上积分，并对左边应用分部积分公式，得

$$r_1^{\,N-1}\|v'\|_2^{\,2}\leqslant r_2^{\,N-1}\big(a\|u\|_2^{\,2}+b\|u'\|_2^{\,2}+c\|v\|_2^{\,2}\big). \tag{23}$$

因为$u=Sv$，$v=Sh$，由引理2之式(8)，有

$$\|u\|_2\leqslant\frac{L^2M}{2}\|v\|_2,\qquad\|u'\|_2\leqslant\frac{LM}{\sqrt{2}}\|v\|_2,\qquad\|v\|_2\leqslant\frac{L}{\sqrt{2}}\|v'\|_2.$$

因此，由式(23)，有

$$\begin{aligned}\|v\|_2^{\,2}&\leqslant\frac{L^2}{2}\|v'\|_2^{\,2}\leqslant\frac{L^2M}{2}\big(a\|u\|_2^{\,2}+b\|u'\|_2^{\,2}+c\|v\|_2^{\,2}\big)\leqslant\frac{L^2M}{2}\left(a\frac{L^4M^2}{4}\|v\|_2^{\,2}+b\frac{L^2M^2}{2}\|v\|_2^{\,2}+c\|v\|_2^{\,2}\right)\\&=\left(a\frac{L^6M^3}{8}+b\frac{L^4M^3}{4}+c\frac{L^2M}{2}\right)\|v\|_2^{\,2}=(\sigma_1a+\sigma_2b+\sigma_3c)\|v\|_2^{\,2}.\end{aligned}$$

因为$\sigma_1a+\sigma_2b+\sigma_3c<1$，因此由上式得$\|v\|_2=0$．于是$v=0$．从而$u=Sv=0$．因此$u_1=u_2$．故问题(1)有唯一径向对称解．

3 例子

例1 考虑$\mathbb{R}^3$中环形区域$\Omega=\big\{x\in\mathbb{R}^3\,\big|\,1<|x|<2\big\}$上含超线性梯度项与超线性Laplace算子项的四阶椭

圆边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u = \dfrac{1}{8}u + 2|\nabla u|^3\Delta u + 3(\Delta u)^5 + |x|^2, & x \in \Omega,\\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta u|_{\partial\Omega} = 0.\end{cases} \tag{24}$$

对应于问题(1)，相应的非线性项为

$$f(r,\xi,\eta,\gamma) = \frac{1}{8}\xi + 2\eta^3\gamma + 3\gamma^5 + r^2, \quad (r,\ \xi,\ \eta,\ \gamma) \in (1,2)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}. \tag{25}$$

对应于式(3)的常数为：$L = 1$, $M = 4$, $\sigma_1 = 8$, $\sigma_2 = 16$, $\sigma_3 = 2$，取 $a = \frac{1}{16}$, $b = 0$, $c = \frac{1}{8}$, $d = 16$，则 $\sigma_1 a + \sigma_2 b + \sigma_3 c = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1$，因此 a, b, c 满足(H1)中的条件. 对任意 $(r,\ \xi,\ \eta,\ \gamma) \in (1,2)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$，由式(25)得

$$\begin{aligned}-f(r,\xi,\eta,\gamma)\gamma &= -\frac{1}{8}\xi\gamma - 2\eta^3\gamma^2 - 3\gamma^6 - r^2\gamma \leqslant \frac{1}{8}|\xi\gamma| + 2|\gamma| \leqslant \frac{1}{16}\xi^2 + \frac{1}{16}\gamma^2 + \frac{1}{16}\gamma^2 + 16\\ &\leqslant \frac{1}{16}\xi^2 + \frac{1}{8}\gamma^2 + 16 = a\xi^2 + b\eta^2 + c\gamma^2 + d.\end{aligned}$$

因此 $f(r,\xi,\eta,\gamma)$ 满足条件(H1)，故由定理1，方程(24)有径向对称解.

例2　设 $N \geqslant 2$，考虑 $\mathbb{R}^N$ 中环形区域 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \mid 1 < |x| < 2\}$ 上四阶椭圆边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u = \alpha u - \beta|\nabla u| + \delta(\Delta u)^3 + 1, & x \in \Omega,\\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta u|_{\partial\Omega} = 0,\end{cases} \tag{26}$$

其中 $\alpha,\beta,\delta > 0$ 为常数. 我们证明当 $\alpha + \beta < 2^{-3(N-2)-2}$ 时，对应的非线性项

$$f(r,\xi,\eta,\gamma) = \alpha\xi - \beta\eta + \delta\gamma^3 + 1, \quad (r,\ \xi,\ \eta,\ \gamma) \in (1,2)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}, \tag{27}$$

满足条件(H2)，从而由定理2，问题(26)有唯一的径向对称解.

对任意 $r \in [1,2]$, $(\xi_1,\ \eta_1,\ \gamma_1)$, $(\xi_2,\ \eta_2,\ \gamma_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$，由式(27)及微分中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$ 及 $\xi' = \xi_1 + \theta(\xi_2 - \xi_1)$, $\eta' = \eta_1 + \theta(\eta_2 - \eta_1)$, $\gamma' = \gamma_1 + \theta(\gamma_2 - \gamma_1)$，使得

$$\begin{aligned}&-\big(f(r,\ \xi_2,\ \eta_2,\ \gamma_2) - f(r,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \gamma_1)\big)(\gamma_2 - \gamma_1)\\ &= -f_\xi(r,\xi',\eta',\gamma')(\xi_2 - \xi_1)(\gamma_2 - \gamma_1) - f_\eta(r,\xi',\eta',\gamma')(\eta_2 - \eta_1)(\gamma_2 - \gamma_1) - f_\gamma(r,\xi',\eta',\gamma')(\gamma_2 - \gamma_1)^2\\ &= -\alpha(\xi_2 - \xi_1)(\gamma_2 - \gamma_1) + \beta(\eta_2 - \eta_1)(\gamma_2 - \gamma_1) - 3\delta\gamma'^2(\gamma_2 - \gamma_1)^2\\ &\leqslant \alpha|(\xi_2 - \xi_1)(\gamma_2 - \gamma_1)| + \beta|(\eta_2 - \eta_1)(\gamma_2 - \gamma_1)|\\ &\leqslant \alpha(\xi_2 - \xi_1)^2 + \frac{\alpha}{4}(\gamma_2 - \gamma_1)^2 + \beta(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{\beta}{4}(\gamma_2 - \gamma_1)^2\\ &\leqslant \alpha(\xi_2 - \xi_1)^2 + \beta(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{\alpha + \beta}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)^2.\end{aligned} \tag{28}$$

取 $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \frac{\alpha + \beta}{2}$，按式(3)，对应的参数为 $L = 1$, $M = 2^{N-1}$, $\sigma_1 = 2^{3(N-2)}$, $\sigma_2 = 2^{3(N-2)+1}$, $\sigma_3 = 2^{N-2}$. 故有

$$\sigma_1 a + \sigma_2 b + \sigma_3 c = 2^{3(N-2)}\alpha + 2^{3(N-2)+1}\beta + 2^{N-2}(\alpha + \beta) < \beta + 2^{3(N-2)+2}(\alpha + \beta) < 1\ .$$

因此，由式(28)知，f 满足条件(H2).

参考文献：

郭大钧，1985. 非线性泛函分析[M]. 3版，济南：山东科学技术出版社.

彭永东，邓引斌，1997. 临界半线性双调和方程非平凡解的存在性[J]. 数学物理学报，17(4)：452-465.

邱海龙，安荣，2012. 半线性双调和方程解的存在性[J]. 应用泛函分析学报，14(2)：161-165.

PAO C V，2000. On fourth-order elliptic boundary value problems[J]. Proc Amer Math Soc，128(4)：1023-1030.

PAO C V，WANG Y M，2010. Nonlinear fourth-order elliptic equations with nonlocal boundary conditions[J]. J Math Anal Appl，372(2)：351-365.

FENG M Q，CHEN H P，2023. Positive solutions for a class of biharmonic equations：Existence and uniqueness[J]. Appl Math Lett，143：108687.

FENG M Q，2023. Positive solutions for biharmonic equations：Existence，uniqueness and multiplicity[J]. Mediterr J Math，20：309.

GAZZOLA F，GRUNAU H C，SQUASSINA M，2003. Existence and nonexistence results for critical growth biharmonic elliptic equations[J]，Calc Var Partial Differ Equ，18(2)：117-143.

LI Y X，2005. On the existence and nonexistence of positive solutions for nonlinear Sturm-Liouville boundary value problems[J]. J Math Anal Appl，304(1)：74-86.

LI Y X，2018. Positive radial solutions for elliptic equations with nonlinear gradient terms in an annulus[J]. Complex Var Elliptic Equ，63(2)：171-187.

LIU X Q，HUANG Y S，2010. On sign-changing solution for a fourth-order asymptotically linear elliptic problem[J]. Nonlinear Anal Theory Meth Appl，72(5)：2271-2276.

LIU Y，WANG Z P，2007. Biharmonic equations with asymptotically linear nonlinearities[J]. Acta Math Sci，27(3)：549-560.

PEI R C，2010. Multiple solutions for biharmonic equations with asymptotically linear nonlinearities[J]. Bound Value Probl：241518.

PEI R C，XIA H M，2023. Multiplicity results for some fourth-order elliptic equations with combined nonlinearities[J]. AIMS Math，8(6)：14704-14725.

WANG Y M，2005. On fourth-order elliptic boundary value problems with nonmonotone nonlinear function[J]. J Math Anal Appl，307(1)：1-11.

ZHANG J，WEI Z L，2011. Multiple solutions for a class of biharmonic equations with a nonlinearity concave at the origin[J]. J Math Anal Appl，383(2)：291-306.

（责任编辑　冯兆永）